Adı Soyadı:
Numarası:
İmza:

1	2	3	4	5	Toplam

04.04.2022

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 212 ANALİZ IV 1. QUİZ SORULARI

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2 y \arctan^2 \dfrac{1}{x^4+y^4}\right)=0$ olduğunu limitin δ, ε lu tanımını kullanarak gösteriniz.

2) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

3) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 3\}$ kümesinin bağlantısız olup olmadığını belirleyiniz.

4) $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ olsun. Bu durumda f, a nın $U(=B(a,\delta)-\{a\})$ komşuluğunda sınırlıdır, gösteriniz.

5) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sürekli ise $A=\{x\in\mathbb{R}^n : \|f(x)\|<1\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

Not: Sadece 4 soru cevaplayınız. Sorular eşit puanlıdır. Süre 60 dakikadır. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

1-) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2y)\left(\arctan^2 \dfrac{1}{x^4+y^4}\right) = 0$ olduğunu limitin

δ, ε lu tanımını kullanarak gösteriniz.

Çözüm: $\forall \varepsilon>0$ verildiğinde $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$ olduğunda

$\left| x^2y \arctan^2 \dfrac{1}{x^4+y^4} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ var mı?

$$\left| x^2y \arctan^2 \frac{1}{x^4+y^4}\right| = x^2\,|y|\,\arctan^2 \frac{1}{x^4+y^4}$$

$$< \delta^2 . \delta . \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{4} . \delta^3$$

$$\underset{0<\delta<1}{<} \frac{\pi^2}{4}\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{4\varepsilon}{\pi^2}$$

$\boxed{\|(x,y)\|<\delta \Leftrightarrow |x|<\delta,\ |y|<\delta}$

$\boxed{\forall x\in\mathbb{R} \text{ için } \arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$

$\delta = \min\left\{1, \dfrac{4\varepsilon}{\pi^2}\right\}$

2-) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} , & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 , & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

fonksiyonunun $(0,0,0)$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = f(0,0,0)=0$ mı?

$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0,0)$ ve $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \dfrac{-\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{3}}{n}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \to -\frac{1}{\sqrt{3}}$ dür.

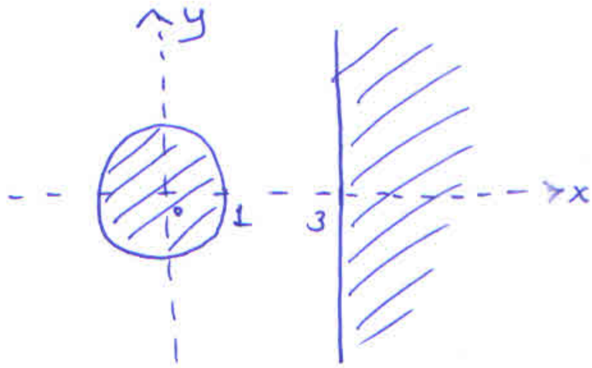
$\left(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\to(0,0,0)$ ve $f\left(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{3}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \to \frac{1}{\sqrt{3}}$ dür.

$-\frac{1}{\sqrt{3}} \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ olduğundan $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ limiti yoktur.

Dolayısıyla f, $(0,0,0)$ da sürekli olamaz.

3) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geqslant 3\}$ kümesinin bağlantısız olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:



$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>2\}$ açık küme

$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<2\}$ açık küme

$G\cap H=\emptyset$

$A\subset G\cup H$

$G\cap A\neq\emptyset$

$H\cap A\neq\emptyset$

olduğundan A bağlantısızdır.

4) $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ olsun. Bu durumda f, a nın $U=B(a,\delta)-\{a\}$ komşuluğunda sınırlıdır, gösteriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ 0<\|x-a\|<\delta$ olan $\forall x\in A$ için $\|f(x)-L\|<\varepsilon$ dur.

$\varepsilon=1$ için de sağlanır. Yani $\forall x\in(B(a,\delta)-\{a\})\cap A$ için

$\|f(x)\|\leq\|f(x)-L\|+\|L\|<1+\|L\|$

olduğundan f, a nın delik komşuluğunda sınırlıdır.

5) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sürekli ise $A=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|f(x)\|<1\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $B=\{y\in\mathbb{R}^m:\|y\|<1\}=B(0,1)$ ve her açık yuvar bir açık küme olduğundan B kümesi $\mathbb{R}^m$ de açıktır. f sürekli olduğundan $f^{-1}(B)$, $\mathbb{R}^n$ de açıktır.

$f^{-1}(B)=\{(x\in\mathbb{R}^n:\ f(x)\in B\}=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|f(x)\|<1\}=A$

olur. Bu ise A nın açık küme olması demektir.